

**ČECHSCHE HOMOLOGIE-THEORIE ALS
SATELLITENTHEORIE**

Auszug

**Inauguraldissertation
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
zur
Erlangung des Doktorgrades**

**vorgelegt von
Otto Gerstner
aus Prag**

**Bonn
1960**

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Mai 1960

Dekan: Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hesse

Berichterstatter: Universitätsprofessor

Dr. Georg Nöbeling

Berichterstatter: Universitätsprofessor

Dr. Hans-Joachim Kowalsky



Sonderdruck aus: Bonner Mathematische Schriften Nr. 12

HOMOLOGIE-MODULN ÜBER ABELSCHEN HALBGRUPPEN.
BESTIMMUNG DER ČECHSCHEN HOMOLOGIE-MODULN
EINES RAUMES X DURCH EINEN FUNKTIONENRING
ÜBER X .¹⁾

Von Otto Gerstner in Erlangen.

Wir übertragen die in den beiden vorangehenden Arbeiten von G. Nöbeling^{2) 3)} für Cohomologie-Moduln hergeleiteten Definitionen und Sätze auf Homologie-Moduln, soweit dies möglich ist.

Für Anregung und Ratschläge zu dieser Arbeit möchte ich Herrn Professor Dr. G. Nöbeling meinen herzlichen Dank aussprechen.

¹⁾ Diese Arbeit enthält den wesentlichen Teil meiner von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen angenommenen Dissertation "Čechsche Homologie-Theorie als Satellitentheorie" (D 29; März 1960).

²⁾ G. Nöbeling, "Cohomologie-Moduln über abelschen Halbgruppen", Bonner Mathematische Schriften.

³⁾ G. Nöbeling, "Bestimmung der Čechschen Cohomologie-Moduln eines Raumes X durch einen Funktionenring über X ", Bonner Mathematische Schriften.

§ 1. Inverse Modulfamilien.

1.1. Wörtlich wie 1.c. ²⁾, 1.1.

1.2. Wörtlich wie 1.c. ²⁾, 1.2.; nur sind die dortigen Nummern (1) - (3) durch die folgenden zu ersetzen:

$$(1) \quad \pi_b^a : G_b \longrightarrow G_a$$

$$(2) \quad \pi_b^a \pi_c^b = \pi_c^a \text{ für } a \geq b \geq c,$$

$$\pi_a^a = \text{Identität.}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} F_a & \xrightarrow{\varphi_a} & G_a \\ \uparrow \pi_b^a & & \uparrow \pi_b^a \\ F_b & \xrightarrow{\varphi_b} & G_b \end{array} \quad (a \geq b).$$

1.3. Die direkte Summe $\bigoplus_i \mathcal{G}$ von Modulfamilien $\mathcal{G} = \{ G; \pi \}$ ist die Modulfamilie $\mathcal{G} = \{ G; \pi \}$, wobei G_a die direkte Summe $\bigoplus_i G_a$ der Moduln G_a und π_b^a die direkte Summe $\bigoplus_i \pi_b^a$ der Homomorphismen π_b^a ist.

Eine Modulfamilie $\mathcal{P}$ heißt projektiv, wenn zu jedem Epimorphismus $\varphi : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{M}$ und jedem Homomorphismus $\chi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{M}$ ein Homomorphismus $\psi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Z}$ mit $\chi = \varphi \psi$ existiert.

Satz 1. Zu jeder Modulfamilie $\mathcal{G} = \{G; \pi\}$ existiert eine projektive Modulfamilie $\mathcal{P}$ mit einem Epimorphismus $\mu : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$.⁴⁾

Beweis. 1. Vorbereitung. Für jedes $c \in \mathcal{A} - \mathcal{K}$ liege ein zunächst beliebiger Modul R_c vor; für jedes $c \in \mathcal{K}$ sei $R_c = 0$; für jedes $c \in \mathcal{A}$ liege außerdem ein Epimorphismus $\varphi_c : R_c \rightarrow G_c$ vor.

Für jedes $c \in \mathcal{A}$ definieren wir eine Modulfamilie

${}_c\mathcal{T} = \{ {}_cS; {}_c\mathcal{E} \}$ folgendermaßen:

$${}_cS_a = \begin{cases} R_c, & \text{wenn } a \geq c, \\ 0 \subseteq R_c & \text{sonst,} \end{cases} \quad {}_c\mathcal{E}_b^a = \begin{cases} \text{Identität,} & \text{wenn } b \geq c, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter sei $\mathcal{T} = \{ S; \mathcal{E} \}$ die direkte Summe $\bigoplus_c {}_c\mathcal{T}$ der Modulfamilien ${}_c\mathcal{T}$. Wir behaupten die Existenz eines Epimorphismus $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$.

Zum Beweis definieren wir für jedes $a \in \mathcal{A}$ und jedes $c \in \mathcal{A}$ einen Homomorphismus ${}_c\mu_a : {}_cS_a \rightarrow G_a$ folgendermaßen:

$${}_c\mu_a = \begin{cases} \pi_c^a \varphi_c, & \text{wenn } a \geq c, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

⁴⁾ Diese Konstruktion stimmt überein mit einer Konstruktion bei R. Deheuvels, "Homologie à coefficients dans un anti-faisceau", C.R. Acad. Sci. Paris, Bd. 250, S. 2492, (1960). Diese Arbeit hat auch sonst einige Berührungspunkte mit der unsrigen.

Dann besteht die Gleichung ${}_c\mu_a {}_c\sigma_b^a = \pi_b^a {}_c\mu_b$ für $a \geq b$; denn ist nicht $b \geq c$, so ist ${}_c\sigma_b^a = 0 = {}_c\mu_b$; ist aber $b \geq c$, so ist ${}_c\sigma_b^a$ die Identität, ${}_c\mu_a = \pi_c^a \rho_c$ und ${}_c\mu_b = \pi_c^b \rho_c$, so daß die behauptete Gleichung übergeht in $\pi_c^a \rho_c = \pi_b^a \pi_c^b \rho_c$, die nach (2) gilt.

Die direkte Summe $\bigoplus_c {}_c\mu_a$ ist ein Homomorphismus $\mu_a : S_a \longrightarrow G_a$. Für ihn folgt aus der soeben bewiesenen Gleichung $\mu_a {}_c\sigma_b^a = \pi_b^a \mu_b$ für $a \geq b$; denn ist ${}_c\nu_a : {}_cS_a \longrightarrow S_a$ die Injektion von ${}_cS_a$ in S_a , so ist $\mu_a {}_c\nu_a = {}_c\mu_a$, $\mu_b {}_c\nu_b = {}_c\mu_b$ und $\sigma_b^a {}_c\nu_b = {}_c\nu_a {}_c\sigma_b^a$, also $(\mu_a {}_c\sigma_b^a) {}_c\nu_b = (\pi_b^a \mu_b) {}_c\nu_b$ für jedes $c \in \alpha$.

Also ist $\{\mu_a\}_{a \in \alpha}$ ein Homomorphismus $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$.

Schließlich ist μ ein Epimorphismus, da ${}_a\mu_a = \pi_a^a \rho_a = \rho_a$ ein Epimorphismus und folglich auch μ_a ein Epimorphismus ist.

2. Nun wählen wir jedes R_c speziell als projektiven Modul und behaupten, daß dann die Modulfamilie $\mathcal{F}$ projektiv ist.

Da die direkte Summe projektiver Modulfamilien projektiv ist, genügt es zu zeigen, daß ${}_c\mathcal{F}$ projektiv ist für jedes $c \in \alpha$.

Es seien $\mathcal{T} = \{T; \tau\}$ und $\mathcal{M} = \{W; \omega\}$ zwei Modulfamilien, $\varphi: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M}$ ein Epimorphismus, $\chi: {}_c\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M}$ ein Homomorphismus. Zu zeigen ist die Existenz eines Homomorphismus $\psi: {}_c\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ mit $\chi = \varphi\psi$.

Da $\varphi_c: T_c \longrightarrow W_c$ ein Epimorphismus, $\chi_c: {}_cS_c \longrightarrow W_c$ ein Homomorphismus und ${}_cS_c$ projektiv ist, existiert ein Homomorphismus $\psi_c: {}_cS_c \longrightarrow T_c$ mit $\chi_c = \varphi_c \psi_c$. für beliebiges $a \in \mathcal{O}$ definieren wir:

$$\psi_a = \begin{cases} \tau_c^a \psi_c, & \text{wenn } a \geq c, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Erstens behaupten wir, daß $\{\psi_a\}_{a \in \mathcal{O}}$ ein Homomorphismus $\psi: {}_c\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ ist, d. h. daß die Gleichung

$$\psi_a {}_c\sigma_b^a = \tau_b^a \psi_b \text{ für } a \geq b \text{ gilt; ist nämlich nicht}$$

$b \geq c$, so ist ${}_c\sigma_b^a = 0 = \psi_b$; ist aber $b \geq c$, so ist ${}_c\sigma_b^a$ die Identität, die zu beweisende Gleichung also $\psi_a = \tau_b^a \psi_b$, also $\tau_c^a \psi_c = \tau_b^a \tau_c^b \psi_c$, was nach (2)

richtig ist. Zweitens behaupten wir, daß $\chi_a = \varphi_a \psi_a$ ist

für jedes $a \in \mathcal{O}$, daß also $\chi = \varphi\psi$ ist; ist nicht $a \geq c$, so ist $\psi_a = 0$ und $\chi_a = 0$ wegen ${}_cS_a = 0$; ist aber

$$a \geq c, \text{ so ist } \varphi_a \psi_a = \varphi_a \tau_c^a \psi_c = \omega_c^a \varphi_c \psi_c = \omega_c^a \chi_c = \chi_a {}_c\sigma_c^a = \chi_a.$$

1.4. Als inversen Limes einer Modulfamilie $\mathcal{G} = \{G; \pi\}$ über $\mathcal{A}$ bezeichnet man einen Modul G_0 mit folgenden zwei Eigenschaften:

(4) für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist ein Homomorphismus $\pi_a : G_0 \longrightarrow$

G_a definiert mit $\pi_b^a \pi_b = \pi_a$ für $a \geq b$;

(5) ist G'_0 ein Modul und $\pi'_a : G'_0 \longrightarrow G_a$ für jedes

$a \in \mathcal{A}$ ein Homomorphismus mit $\pi_b^a \pi'_b = \pi'_a$

für $a \geq b$, so existiert genau ein Homomorphismus

$\pi : G'_0 \longrightarrow G_0$ mit $\pi'_a = \pi_a \pi$ für jedes $a \in \mathcal{A}$.

Durch diese beiden Eigenschaften ist G_0 bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt.

Die Existenz von G_0 ergibt sich folgendermaßen. Es sei

$R = \prod G_a$ das direkte Produkt der Moduln G_a und G_0

der Teilmodul von R , welcher aus den Elementen

$\{g_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ von R besteht mit $\pi_b^a g_b = g_a$ für

$a \geq b$. Diesen Modul G_0 bezeichnen wir als den inversen

Limes von $\mathcal{G}$ und schreiben $G_0 = \text{Lim}_0(\mathcal{G})$.

Ist $\mathcal{F} = \{F; \pi\}$ eine zweite Modulfamilie über $\mathcal{A}$

und $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus, so existiert

genau ein Homomorphismus $\varphi_0 : F_0 \longrightarrow G_0$ derart,

daß für jedes $a \in \mathcal{A}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_a & \xrightarrow{\varphi_a} & G_a \\ \uparrow \pi_a & & \uparrow \pi_a \\ F_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & G_0 \end{array}$$

kommutativ ist. Wir schreiben $\varphi_0 = \text{Lim}_0(\varphi)$.

Ist $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein zweiter Homomorphismus, so ist $(\varphi + \psi)_0 = \varphi_0 + \psi_0$.

Schließlich seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ drei Modulfamilien über $\mathcal{A}$ und $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ und $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ Homomorphismen. Dann ist zunächst $(\psi\varphi)_0 = \psi_0 \varphi_0$. Weiter behaupten wir:

Satz 2. Ist die Sequenz $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ exakt, so ist auch die Sequenz

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\psi_0} \mathcal{H}_0 \text{ exakt.}$$

Beweis. Nicht ganz trivial und daher zu beweisen ist nur die Behauptung $\text{Kern } \psi_0 \subseteq \text{Bild } \varphi_0$.

Es sei also ein $g \in \text{Kern } \psi_0$ gegeben. Als Element von $\prod \mathcal{G}_a$ besitze g die Koordinaten $g_a \in \mathcal{G}_a$. Dann gilt

$$\psi_a g_a = 0 \text{ für jedes } a \in \mathcal{A}. \text{ Es existiert also ein } f_a \in \mathcal{F}_a$$

mit $\varphi_a f_a = g_a$ für jedes $a \in \mathcal{A}$, da die Sequenz

$$\mathcal{F}_a \rightarrow \mathcal{G}_a \rightarrow \mathcal{H}_a \text{ für jedes } a \in \mathcal{A} \text{ exakt ist. Da jedes}$$

φ_a ein Monomorphismus ist, liegt das Element f von

$$\prod \mathcal{F}_a \text{ mit den Koordinaten } f_a \text{ in } \mathcal{F}_0, \text{ und es ist } \varphi_0 f = g.$$

§ 2. Homologie-Moduln über einer Teilmenge einer abelschen Halbgruppe.

2.1. Es sei gegeben:

- I) eine (multiplikative) abelsche Halbgruppe $\mathcal{A}$ (nicht leere Menge mit kommutativer und assoziativer Multiplikation); für Elemente a, b von $\mathcal{A}$ schreiben wir $a \geq b$, wenn ein $x \in \mathcal{A}$ und eine natürliche Zahl n mit $b^n = ax$ existieren; diese Relation $\geq$ ist eine Präordnung in $\mathcal{A}$; ⁵⁾
- II) eine (eventuell leere) Teilmenge $\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ derart, daß aus $a \in \mathcal{N}$, $a \geq b$ folgt $b \in \mathcal{N}$;
- III) eine nicht leere Teilmenge A von $\mathcal{A}$.

Beispiele. Wörtlich wie in 1. c. ²⁾, 2.1.

2.2. Es sei $\mathcal{G} = \{G; \pi\}$ eine Modulfamilie. Wir definieren Homologie-Moduln $H_p^A(\mathcal{G})$ ($p = 0, 1, \dots$) folgendermaßen.

Eine Funktion k von $p+1$ Variablen $a_0, \dots, a_p \in A$ mit

$$(6) \quad k(a_0, \dots, a_p) \in G_{a_0 \dots a_p}$$

und

$$(7) \quad k(a_0, \dots, a_p) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele Tupel } (a_0, \dots, a_p)$$

⁵⁾ Die so erhaltene Präordnung ist die grösste Präordnung mit den beiden folgenden Eigenschaften: $a^m \geq a^{m'}$ für je zwei natürliche Zahlen m und m' ; $a \geq ab$.

heißt eine p-Kette (auf A , "mit Koeffizienten in $\mathcal{G}$ ").

Die p-Kette k mit $k(a_0, \dots, a_p) = 0$ für alle $a_0, \dots, a_p \in A$ bezeichnen wir mit 0 .

Für jedes $p = 0, 1, \dots$ bilden die p-Ketten eine Modul $C_p^A(\mathcal{G})$. Außerdem setzen wir $C_{-1}^A(\mathcal{G}) = 0$.

Der Rand ∂k einer p-Kette k ist die folgendermaßen definierte $(p-1)$ -Kette:

$$\begin{aligned} \partial k &= 0 \quad (p = -1), \\ (\partial k)(a_0, \dots, a_{p-1}) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{a \in A} \pi_{a_0 \dots a_{p-1} a}^{a_0 \dots a_{p-1}} k(a_0, \dots, \\ &\quad a_{i-1}, a, a_i, \dots, a_{p-1}) \quad (p = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Man zeigt wie üblich $\partial \partial k = 0$. Der Kern des Homomorphismus

$$\partial : C_p^A(\mathcal{G}) \longrightarrow C_{p-1}^A(\mathcal{G})$$

heißt $Z_p^A(\mathcal{G})$ und jedes Element von $Z_p^A(\mathcal{G})$ ein p-Zyklus.

Das Bild von ∂ heißt $B_{p-1}^A(\mathcal{G})$.

Wir definieren nun:

$$H_p^A(\mathcal{G}) = Z_p^A(\mathcal{G}) / B_p^A(\mathcal{G}) \quad (p = 0, 1, \dots).$$

Im Beispiel 1 von l. c.²⁾, 2.1. haben die vorstehenden und auch die folgenden Definitionen denselben Sinn wie in der Theorie der Čechschen Homologie-Moduln "mit Koeffizienten in einer Prägarbe" über einem Raum X .⁶⁾

⁶⁾ Eine solche Theorie behandelt E. Luft, "Eine Verallge-

2.3. Es seien $\mathcal{G}'$ und $\mathcal{G}$ zwei Modulfamilien und $\varphi : \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Homomorphismus.

Jeder p -Kette k' aus $C_p^A(\mathcal{G}')$ ordnen wir zu die folgendermaßen definierte p -Kette k aus $C_p^A(\mathcal{G})$:

$$(8) \quad k(a_0, \dots, a_p) = \varphi_{a_0 \dots a_p} k'(a_0, \dots, a_p).$$

Hiermit ist ein Homomorphismus

$$\varphi_p^A : C_p^A(\mathcal{G}') \longrightarrow C_p^A(\mathcal{G})$$

definiert. Er ist mit dem Rand-Homomorphismus verträglich:

$$\varphi_p^A(\partial k') = \partial(\varphi_{p+1}^A k') \quad \text{für } k' \in C_{p+1}^A(\mathcal{G}').$$

Er induziert daher einen Homomorphismus

$$H_p^A(\varphi) : H_p^A(\mathcal{G}') \longrightarrow H_p^A(\mathcal{G})$$

mit folgenden drei Eigenschaften:

Satz 3_A. a) Ist φ die Identität, so auch $H_p^A(\varphi)$;

$$b) \quad H_p^A(\psi + \varphi) = H_p^A(\psi) + H_p^A(\varphi);$$

$$c) \quad H_p^A(\psi \varphi) = H_p^A(\psi) H_p^A(\varphi).$$

2.4. Es liege vor eine exakte Sequenz von Modulfamilien:

$$(9) \quad \sigma \longrightarrow \mathcal{G}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}'' \longrightarrow \sigma$$

meinerung der Čechschen Homologie-Theorie", Bonner Mathematische Schriften.

Dann ist auch die Sequenz_A

$$(10) \quad 0 \longrightarrow C_p^A(\sigma') \xrightarrow{\psi_p^A} C_p^A(\sigma) \xrightarrow{\psi_p^A} C_p^A(\sigma'') \longrightarrow 0$$

exakt. Die Theorie der formalen Komplexe liefert folgenden

Satz 4_A. Die exakte Sequenz (9) induziert eine exakte Homologie-Sequenz

$$(11_A) \quad \begin{aligned} & \dots \longrightarrow H_{p+1}^A(\sigma'') \xrightarrow{\partial_p^A} H_p^A(\sigma') \xrightarrow{H_p^A(\psi)} H_p^A(\sigma) \\ & \xrightarrow{H_p^A(\psi)} H_p^A(\sigma'') \longrightarrow \dots \longrightarrow H_1^A(\sigma'') \xrightarrow{\partial_0^A} \\ & H_0^A(\sigma') \xrightarrow{H_0^A(\psi)} H_0^A(\sigma) \xrightarrow{H_0^A(\psi)} H_0^A(\sigma'') \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

2.5. Satz 5_A. Das Diagramm

$$(12) \quad \begin{array}{ccccccc} \sigma & \longrightarrow & \sigma' & \longrightarrow & \sigma & \longrightarrow & \sigma'' \longrightarrow \sigma \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' \\ \sigma & \longrightarrow & \sigma' & \longrightarrow & \sigma & \longrightarrow & \sigma'' \longrightarrow \sigma \end{array}$$

In welchem die Zeilen exakte Sequenzen von Modulfamilien sind, sei kommutativ. Dann ist das Diagramm

$$(13_A) \quad \begin{array}{ccc} H_{p+1}^A(\sigma'') & \xrightarrow{\partial_p^A} & H_p^A(\sigma') \\ \downarrow H_{p+1}^A(\varphi'') & & \downarrow H_p^A(\varphi') \\ H_{p+1}^A(\sigma'') & \xrightarrow{\partial_p^A} & H_p^A(\sigma') \end{array}$$

kommutativ.

§ 3. Homologie-Moduln über einem System von Teilmengen einer abelschen Halbgruppe.

3.1. Es sei gegeben:

I) und II) wie in 2.1.;

anstelle von III) allgemeiner

IV) ein nicht leeres System $\mathcal{R}$ von nicht leeren Teilmengen A von $\mathcal{A}$. Es bedeutet $A \geq B$, daß zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $a \geq b$ existiert.

3.2. Es seien A und B zwei Mengen des Systems $\mathcal{R}$ mit $A \geq B$. Dann existiert eine "Verfeinerungs"- Abbildung $\tau : B \longrightarrow A$ mit $\tau b \geq b$ für jedes $b \in B$. Ein solches τ induziert für jede Modulfamilie $\mathcal{G}$ und jedes $p \geq 0$ einen Homomorphismus

$$(14) \quad \tau_p : C_p^B(\mathcal{G}) \longrightarrow C_p^A(\mathcal{G}),$$

der folgendermaßen definiert wird: Ist k eine p -Kette aus

$C_p^B(\mathcal{G})$, so wird ihr die durch

$$(15) \quad (\tau_p k)(a_0, \dots, a_p) = \sum \pi_{b_0 \dots b_p}^{a_0 \dots a_p} k(b_0, \dots, b_p)$$

mit $a_0, \dots, a_p \in A$

definierte Kette aus $C_p^A(\mathcal{G})$ zugeordnet, wobei summiert

wird über alle $(p+1)$ -Tupel $(b_0, \dots, b_p)$ aus B mit

$a_0 = \tau b_0, \dots, a_p = \tau b_p$ (falls es solche Tupel nicht gibt,

wird der Summe der Wert 0 beigelegt).

Aus (15) folgt $\tau_p(\partial k) = \partial(\tau_{p+1} k)$ für $k \in C_{p+1}^B(\mathcal{G})$.

Also induziert τ_p einen Homomorphismus

$$(16) \quad t_{pB}^A : H_p^B(\mathcal{G}) \longrightarrow H_p^A(\mathcal{G}).$$

Wir behaupten, daß t_{pB}^A von der speziellen Wahl der Verfeinerungs-Abbildung $\tau : B \longrightarrow A$ unabhängig ist. Es sei also $\bar{\tau} : B \longrightarrow A$ eine zweite Verfeinerungs-Abbildung. Sie induziere den Homomorphismus $\bar{t}_{pB}^A : H_p^B(\mathcal{G}) \longrightarrow H_p^A(\mathcal{G})$.

Wir haben zu zeigen, daß er mit t_{pB}^A identisch ist.

Man beweist dies wie üblich mittels des Homotopie-Operators

$\varphi : C_p^B(\mathcal{G}) \longrightarrow C_{p+1}^A(\mathcal{G})$ definiert durch

$$(\varphi k)(a_0, \dots, a_{p+1}) = \sum (-1)^i \pi_{b_0 \dots b_p}^{a_0 \dots a_{p+1}} k(b_0, \dots, b_p)$$

mit $k \in C_p^B(\mathcal{G})$, $a_0, \dots, a_{p+1} \in A$,

wobei summiert wird über alle $i = 0, \dots, p$ und alle Tupel

$$(b_0, \dots, b_p) \text{ aus } B \text{ mit } a_0 = \tau b_0, \dots, a_i = \tau b_i, a_{i+1} =$$

$$\bar{\tau} b_i, \dots, a_{p+1} = \bar{\tau} b_p.$$

3.3. Aus der Definition der Homomorphismen t_{pB}^A ergibt sich

unmittelbar, daß t_{pA}^A für jedes $A \in \mathcal{R}$ die Identität ist und

daß für $A \geq B \geq C$ in $\mathcal{R}$ gilt $t_{pB}^A t_{pC}^B = t_{pC}^A$. Also ist

für jede Modulfamilie und jedes $p \geq 0$ das System

$\{H_p^A(\mathcal{G}); t_{pB}^A\}$ eine Modulfamilie über dem (durch die Re-

lation $\geq$ prägeordneten) System $\mathcal{R}$. Den inversen Limes dieser Modulfamilie bezeichnen wir mit

$$H_p(\mathcal{G})$$

und nennen diesen Modul den p -ten Homologie-Modul über $\mathcal{R}$.

Zu jedem $A \in \mathcal{R}$ gehört ein Homomorphismus

$$t_p^A : H_p(\mathcal{G}) \longrightarrow H_p^A(\mathcal{G})$$

mit $t_{pB}^A t_p^B = t_p^A$ für $A \geq B$ (vgl. 1.4.).

3.4. Für einen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{G}$ und $A \geq B$ ist $\varphi_p^A \tau_p = \tau_p \varphi_p^B$ und wegen $\tau_p \partial = \partial \tau_{p+1}$ auch $\varphi_p^A \tau_p \partial = \partial \tau_{p+1} \varphi_{p+1}^B$ (vgl. 2.3. und 3.1.). Also ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$(17) \quad \begin{array}{ccc} H_p^A(\mathcal{G}') & \xrightarrow{H_p^A(\varphi)} & H_p^A(\mathcal{G}) \\ \uparrow t_{pB}^A & & \uparrow t_{pB}^A \\ H_p^B(\mathcal{G}') & \xrightarrow{H_p^B(\varphi)} & H_p^B(\mathcal{G}) \end{array}$$

Der Übergang zum inversen Limes liefert also einen Homomorphismus

$$H_p(\varphi) : H_p(\mathcal{G}') \longrightarrow H_p(\mathcal{G}).$$

Die Gleichungen a), b) und c) des Satzes 3_A blieben beim

Übergang zum inversen Limes erhalten. Es gilt also

Satz 3. a) Ist φ die Identität, so auch $H_p(\varphi)$;

$$b) H_p(\psi + \varphi) = H_p(\psi) + H_p(\varphi);$$

$$c) H_p(\psi \varphi) = H_p(\psi) H_p(\varphi).$$

3.5. Es liege vor die exakte Sequenz (9).

Die üblichen Schlüsse ergeben, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$(18) \quad \begin{array}{ccc} H_{p+1}^A(\mathcal{G}'') & \xrightarrow{\partial_p^A} & H_p^A(\mathcal{G}') \\ \uparrow t_{p+1B}^A & & \uparrow t_{pB}^A \\ H_{p+1}^B(\mathcal{G}'') & \xrightarrow{\partial_p^B} & H_p^B(\mathcal{G}') \end{array}$$

Hieraus folgt, daß beim Übergang zum inversen Limes der Homomorphismus $\partial_p^A : H_{p+1}^A(\mathcal{G}'') \longrightarrow H_p^A(\mathcal{G}')$ in

einen Homomorphismus

$$\partial_p : H_{p+1}(\mathcal{G}'') \longrightarrow H_p(\mathcal{G}')$$

übergeht. Aus der Kommutativität des Diagramms (18), des Diagramms (17) und des analogen Diagramms für ψ folgt wegen Satz 4_A:

Satz 4. Jede exakte Sequenz

$$(9) \quad \sigma \longrightarrow \mathcal{G}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}'' \longrightarrow \sigma$$

von Modulfamilien induziert eine Homologie-Sequenz

$$\begin{aligned}
 & \dots \longrightarrow \Pi_{p+1}(\mathcal{G}'') \xrightarrow{\partial_p} \Pi_p(\mathcal{G}') \xrightarrow{H_p(\psi)} \Pi_p(\mathcal{G}) \\
 (11) \quad & \xrightarrow{H_p(\psi)} \Pi_p(\mathcal{G}'') \longrightarrow \dots \longrightarrow \Pi_1(\mathcal{G}'') \xrightarrow{\partial_0} \\
 & \Pi_0(\mathcal{G}') \xrightarrow{H_0(\psi)} \Pi_0(\mathcal{G}) \xrightarrow{H_0(\psi)} \Pi_0(\mathcal{G}'') \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

In ihr ist die Komposition je zweier aufeinander folgender Homomorphismen der Nullhomomorphismus.

3.6. Satz 5. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 \sigma & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}'' \longrightarrow \sigma \\
 & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' \\
 (12) \quad \sigma & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G}'' \longrightarrow \sigma
 \end{array}$$

in welchem die Zeilen exakte Sequenzen von Modulfamilien sind, sei kommutativ. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H_{p+1}(\mathcal{G}'') & \xrightarrow{\partial_p} & H_p(\mathcal{G}') \\
 \downarrow H_{p+1}(\varphi'') & & \downarrow H_p(\varphi') \\
 (13) \quad H_{p+1}(\mathcal{G}'') & \xrightarrow{\partial_p} & H_p(\mathcal{G}')
 \end{array}$$

kommutativ.

Denn aus der Kommutativität des Diagramms (17) und des analogen Diagramms für ψ folgt, daß beim Übergang zum

inversen Limes das kommutative Diagramm (13_A) in ein ebenfalls kommutatives Diagramm übergeht.

§ 4. Homologie-Moduln als Links-Derivierte.

4.1. Satz 6_A. Es sei $\mathcal{G}$ eine projektive Modulfamilie.

Dann ist $H_p^A(\mathcal{G}) = 0$ für jedes $p \geq 1$

(und jedes $A \in \mathcal{R}$).

Beweis. Für jedes $c \in \mathcal{A}$ sei $G_c = R_c$ gesetzt und $\mathcal{G}_c$ die Identität von $G_c = R_c$. Wir betrachten die im Teil 1 (Vorbereitung) des Beweises von Satz 1 konstruierte Modulfamilie $\mathcal{T}$ und den Epimorphismus $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$.

Da $\mathcal{G}$ projektiv ist, existiert ein Homomorphismus $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}$ mit $\mu\psi = \text{Identität}$. Nach Satz 3_A ist dann auch $H_p^A(\mu) H_p^A(\psi)$ die Identität. Also ist

$H_p^A(\mu) : H_p^A(\mathcal{T}) \rightarrow H_p^A(\mathcal{G})$ ein Epimorphismus. Daher genügt es, die Gleichung $H_p^A(\mathcal{T}) = 0$ zu beweisen.

Hierzu sei ein $k \in Z_p^A(\mathcal{T})$ gegeben. Für beliebige

$a_0, \dots, a_p$ aus A ist $k(a_0, \dots, a_p)$ eine Familie

$\{ {}_c k(a_0, \dots, a_p) \}_{c \in \mathcal{A}}$ mit

$${}_c k(a_0, \dots, a_p) \in {}_c S_{a_0 \dots a_p}$$

$$(\partial_c k)(a_0, \dots, a_{p-1}) = 0 \in {}_c S_{a_0 \dots a_{p-1}}$$

für jedes $c \in \alpha$ und alle $a_0, \dots, a_p \in A$. Angenommen,
wir hätten bereits für jedes $c \in \alpha$ die Existenz einer
(p+1)-Kette ${}_c\mathcal{L} \in C_{p+1}^A({}_c\mathcal{T})$ mit

$$(\partial {}_c\mathcal{L})(a_0, \dots, a_p) = {}_c k(a_0, \dots, a_p)$$

für alle $a_0, \dots, a_p \in A$ bewiesen. Für die (p+1)-Kette
 $\mathcal{L} \in C_{p+1}^A(\mathcal{T})$, definiert durch

$$\mathcal{L}(a_0, \dots, a_{p+1}) = \{ {}_c\mathcal{L}(a_0, \dots, a_{p+1}) \}_{c \in \alpha}$$

(ist ${}_c k = 0$, so kann auch ${}_c\mathcal{L} = 0$ gewählt werden), ist
dann

$$(\partial \mathcal{L})(a_0, \dots, a_p) = k(a_0, \dots, a_p)$$

für alle $a_0, \dots, a_p \in A$, also $\partial \mathcal{L} = k$.

Wenn wir zur Entlastung der Schreibweise setzen $R_c = L$,
 ${}_c\mathcal{T} = \mathcal{L}$, ${}_c S_a = L_a$ und ${}_c \mathcal{G}_b^a = \lambda_b^a$, so bleibt folgendes
zu beweisen.

Es sei c ein festes Element von α , L ein fester Modul
und $\mathcal{L} = \{L; \lambda\}$ die folgendermaßen definierte Modulfam-
ilie:

$$(19) \quad \begin{aligned} L_a &= \begin{cases} L, & \text{wenn } a \geq c, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \lambda_b^a &= \begin{cases} \text{Identität,} & \text{wenn } b \geq c, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Weiter sei k ein p -Zyklus aus $\pi_D^A(\mathcal{L})$. Dann, so ist zu beweisen, existiert eine $(p+1)$ -Kette $\ell \in C_{p+1}^A(\mathcal{L})$ mit

$$(20) \quad (\partial \ell)(a_0, \dots, a_p) = k(a_0, \dots, a_p)$$

für alle $a_0, \dots, a_p \in A$.

Den Fall $k = 0$ können wir als trivial sofort ausschließen.

Es sei also $k \neq 0$. Allgemein gilt für $m \in C_p^A(\mathcal{L})$

$$(21) \quad m(a_0, \dots, a_p) = 0 \text{ falls } a_0 \dots a_p \not\geq c.$$

Nach (21) existiert also ein $\bar{a} \in A$ mit $\bar{a} \geq c$. Wir definieren nun für beliebige $a_0, \dots, a_{p+1} \in A$

$$(22) \quad \ell(a_0, \dots, a_{p+1}) = \begin{cases} (-1)^{p+1} k(a_0, \dots, a_p), & \text{falls } a_{p+1} = \bar{a} \\ 0 \in L_{a_0 \dots a_{p+1}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\ell(a_0, \dots, a_{p+1}) \neq 0$, so ist $a_{p+1} = \bar{a}$ und

$k(a_0, \dots, a_p) \neq 0$. Nach (21) ist also $a_0 \dots a_p \geq c$.

Aus $a_{p+1} = \bar{a} \geq c$ und $a_0 \dots a_p \geq c$ folgt

$a_0 \dots a_{p+1} \geq c^2$, also folgt $a_0 \dots a_{p+1} \geq c$. Somit ist

$\ell(a_0, \dots, a_{p+1})$ in $L_{a_0 \dots a_{p+1}}$. Es ergibt sich nun wie

üblich die Gleichung (20). Damit ist Satz 6_A bewiesen.

Aus Satz 6_A folgt unmittelbar

Satz 6. Es sei $\mathcal{G}$ eine projektive Modulfamilie. Dann ist

$$H_p(\mathcal{G}) = 0 \text{ für jedes } p \geq 1.$$

4.3. Nun sei

$$\sigma \longrightarrow \mathcal{O}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}'' \longrightarrow \sigma$$

eine exakte Sequenz von Modulfamilien und $\mathcal{O}$ injektiv.

Aus den Sätzen 4_A und 6_A folgt unmittelbar

Satz 7_A. Die Sequenz

$$0 \longrightarrow H_p^A(\mathcal{O}'') \xrightarrow{\partial_{p-1}^A} H_{p-1}^A(\mathcal{O}') \xrightarrow{H_{p-1}^A(\varphi)} H_{p-1}^A(\mathcal{O})$$

ist exakt für jedes $p \geq 1$.

Hieraus folgt nach Satz 2

Satz 7. Die Sequenz

$$0 \longrightarrow H_p(\mathcal{O}'') \xrightarrow{\partial_{p-1}} H_{p-1}(\mathcal{O}') \xrightarrow{H_{p-1}(\varphi)} H_{p-1}(\mathcal{O})$$

ist exakt für jedes $p \geq 1$.

4.4. Für jedes ganze $p \geq 0$ ist jeder Modulfamilie $\mathcal{O}$ über $\mathcal{A}$ ein Modul $H_p^A(\mathcal{O})$ und jedem Homomorphismus

$\varphi : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathcal{O}$ ein Homomorphismus

$H_p^A(\varphi) : H_p^A(\mathcal{O}') \longrightarrow H_p^A(\mathcal{O})$ zugeordnet; dabei gilt der Satz 3_A; also ist H_p^A ein kovarianter, additiver Funk-

tor (dessen Definitionsbereich die Kategorie der Modulfamilien über der abelschen Halbgruppe $\mathcal{A}$ und dessen Wertebereich die Kategorie der Moduln ist). Nach den Sätzen 4_A und 5_A bilden die Funktoren H_p^A eine durch die

Homomorphismen ∂_p^A verknüpfte Sequenz. Schließlich

gilt Satz 7_A. Also erfüllen die Funktoren H_p^A mit den verknüpfenden Homomorphismen ∂_p^A die Voraussetzungen von Satz III, 5.2, 1. c. ⁷⁾. Dieser liefert zusammen mit Theorem V, 6.1, 1. c. ⁷⁾ für jedes $A \in \mathcal{R}$:

Satz 8_A. Die verknüpfte Sequenz $\{H_p^A\}_{p=0,1,\dots}$ ist isomorph zur verknüpften Sequenz $\{L_p H_0^A\}_{p=0,1,\dots}$ der links abgeleiteten Funktoren von H_0^A .

Oder weniger genau: Die Homologie-Moduln $H_p^A(\mathcal{G})$ sind die links Derivierten von $H_0^A(\mathcal{G})$.

Analog ergeben die Sätze 3 - 5 und 7 den

Satz 8. Die verknüpfte Sequenz $\{H_p\}_{p=0,1,\dots}$ ist isomorph zur verknüpften Sequenz $\{L_p H_0\}_{p=0,1,\dots}$ der links abgeleiteten Funktoren von H_0 .

§ 5. Die "orientierte" Theorie.

Die in §2 - 4 entwickelte Theorie werde als "allgemeine" Homologie-Theorie bezeichnet.

Es sei $D_p^A(\mathcal{G}) \subseteq C_p^A(\mathcal{G})$ der Teilmodul von $C_p^A(\mathcal{G})$.

⁷⁾ H. Cartan - S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton 1956. - Die oben zitierten Sätze und ihre Beweise gelten auch für Funktoren, deren Argumente Modulfamilien (und deren Werte Moduln) sind.

der von den Ketten $k \in C_p^A(\mathcal{G})$ der folgenden Form erzeugt wird:

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \text{Für genau ein } (p+1)\text{-Tupel } (a_0, \dots, a_p) \text{ aus} \\ A \text{ ist } k(a_0, \dots, a_p) \neq 0; \text{ dabei sind zwei } a_i \\ \text{gleich oder} \\ \text{für genau zwei } (p+1)\text{-Tupel } (a_0, \dots, a_p), \\ (b_0, \dots, b_p) \text{ aus } A \text{ ist } k(a_0, \dots, a_p) \neq 0, \\ k(b_0, \dots, b_p) \neq 0; \text{ dabei sind die } a_i \text{ paarweise} \\ \text{voneinander verschieden, } (b_0, \dots, b_p) \text{ ist eine} \\ \text{Permutation von } (a_0, \dots, a_p) \text{ (Signatur: } \varepsilon), \\ \text{und es ist } k(b_0, \dots, b_p) = -\varepsilon k(a_0, \dots, a_p). \end{array} \right.$$

$D_p^A(\mathcal{G})$ heiße der Modul der degenerierten Ketten. Der Faktormodul $c_p^A(\mathcal{G}) = C_p^A(\mathcal{G}) / D_p^A(\mathcal{G})$ heiße der Modul der orientierten Ketten.

Die sämtlichen Definitionen und Sätze der §§ 2 - 4 bleiben gültig, wenn man sie auf orientierte Ketten überträgt. Wir erhalten so eine "orientierte" Homologie-Theorie.

Nun ist $c_0^A(\mathcal{G}) = C_0^A(\mathcal{G})$. Daher ist der Funktor H_0^A

bzw. H_0 der "allgemeinen" Theorie derselbe wie der

Funktor H_0^A bzw. H_0 der "orientierten" Theorie. Da die

Sätze 8_A und 8 für beide Theorien gelten, so folgt, daß die

"orientierte" Theorie zur "allgemeinen" Theorie isomorph ist.

§ 6. Anwendung in der Čech'schen Homologie-Theorie topologischer Räume.

6.1. Es sei gegeben

- I) ein topologischer Raum X ;
- II) eine (multiplikative) abelsche Halbgruppe α mit Nullelement 0 ; jedem a von α sei eine offene Menge U_a von X derart zugeordnet, daß gilt:

$$(24) \quad U_{ab} = U_a \cap U_b ; U_0 = \emptyset ;$$
- III) ein Raster $\mathcal{R}$ von Teilmengen A von α mit folgenden zwei Eigenschaften:

$$(25) \quad \text{die Familie } \underline{A} = \{ U_a \}_{a \in A} \text{ ist eine Überdeckung von } X ;$$

$$(26) \quad \text{zu jeder Überdeckung von } X \text{ existiert eine Verfeinerung } \underline{A} \text{ mit } A \in \mathcal{R} .$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}$ die Menge aller Elemente a von α mit $U_a = \emptyset$. Aus $a \in \mathcal{K}$, $a \geq b$ folgt $b \in \mathcal{K}$ wegen (24).

Wir definieren $\mathcal{R}$ als den Raster (bezüglich der Verfeinerungsrelation) aller Überdeckungen $\underline{A}$ von X mit $A \in \mathcal{R}$. Wegen (26) genügt es, bei der Definition der Čech'schen Homologie-Moduln von X Überdeckungen aus $\mathcal{R}$ zu verwenden.

Beispiele. Wörtlich wie in l. c. ³⁾, 1.1.

6.2. Jede inverse Prägarbe $\mathcal{G} = \{ G_U ; \pi_V^U \}$ über X induziert eine Modulfamilie $\mathcal{G} = \{ G_a ; \pi_b^a \}$ über α :

für $a \in \mathcal{A}$ ist $G_a = G_{U_a}$; für a, b in $\mathcal{A}$ mit

$$a \geq b \text{ ist } \pi_b^a = \pi_{U_b}^{U_a}.$$

Jeder Homomorphismus $\varphi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ induziert einen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$: für $a \in \mathcal{A}$ ist $\varphi_a = \varphi_{U_a}$. Ist die Sequenz

$$\underline{\sigma} \rightarrow \underline{\mathcal{G}'} \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}''} \rightarrow \underline{\sigma} \text{ exakt, so ist}$$

$$\text{die Sequenz } \underline{\sigma} \rightarrow \underline{\mathcal{G}'} \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}} \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathcal{G}''} \rightarrow \underline{\sigma} \text{ exakt.}$$

6.3. Es sei $A \in \mathcal{R}$ fest. Wir zeigen nun, daß die Čechsche Homologie von X der Überdeckung $\mathcal{A}$ in trivialer Weise gleich der Homologie von $\mathcal{A}$ der Rastermenge A ist, sofern man über letzterer nur solche Modulfamilien $\mathcal{G}$ und Homomorphismen φ betrachtet, wie sie sich aus Prägarben $\mathcal{G}$ und Homomorphismen φ über X gemäß 6.2. ergeben.

Für jede Prägarbe $\mathcal{G}$ über X und $p \geq 0$ ist $C_p^{\mathcal{A}}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{(\partial_p)} G_{U_{a_0} \wedge \dots \wedge U_{a_p}} = \bigoplus_{(\partial_p)} G_{a_0 \dots a_p} = C_p^{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$. Die Randhomomorphismen auf $C_{p+1}^{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ bzw. $C_{p+1}^{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$ stimmen überein. Ist $\varphi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$, so gilt $\varphi_p^{\mathcal{A}} = \varphi_p^{\mathcal{A}}$. Ist $\underline{\sigma} \rightarrow \underline{\mathcal{G}'} \rightarrow \underline{\mathcal{G}} \rightarrow \underline{\mathcal{G}''} \rightarrow \underline{\sigma}$ eine exakte Sequenz, so gilt $\partial_p^{\mathcal{A}} = \partial_p^{\mathcal{A}}$.

6.4. Wir wollen nun eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß $\lim_{\mathcal{A}} H_p^{\mathcal{A}}(\mathcal{G}) = \lim_{\mathcal{A}} H_p^{\mathcal{A}}(\mathcal{G})$, also

$H_p(\underline{\mathcal{G}}) = H_p(\mathcal{G})$ ist.

Eine solche Bedingung ist folgende:

IV) Es gibt eine Relation $U \succ V$ zwischen offenen Mengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(27) ist $U \supseteq V \succ W$, so ist $U \succ W$;

(28) ist $U_a \succ U_b$, so ist $a \geq b$; ⁸⁾

(29) zu jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ von X existiert im-Raster $\mathcal{R}$ eine Menge C derart, daß zu jedem $c \in C$ ein $U \in \mathcal{U}$ existiert mit $U \succ U_c$.

Für Beispiele siehe l. c. ³⁾, 3.1.

Nach (29) existiert zu jeder Menge B des Rasters $\mathcal{R}$ eine Menge C von $\mathcal{R}$ mit einer Abbildung $\tau : C \longrightarrow B$ derart, daß $U_{\tau c} \succ U_c$ ist für jedes $c \in C$; wir schreiben dann $B \succ C$ (wegen (28) folgt $B \geq C$).

6.5. Unter den Voraussetzungen I - IV ist $H_p(\underline{\mathcal{G}}) =$

$H_p(\mathcal{G})$. Denn einerseits ist $\lim_{A \rightarrow 0} H_p^A(\underline{\mathcal{G}}) \subseteq$

$\lim_{A \rightarrow 0} H_p^A(\mathcal{G})$, weil aus $A \geq B$ folgt $\underline{B}$ feiner $\underline{A}$

und $t_B^A = t_{\underline{B}}^{\underline{A}}$. Andererseits ist $\lim_{A \rightarrow 0} H_p^A(\mathcal{G}) \subseteq$

$\lim_{A \rightarrow 0} H_p^A(\underline{\mathcal{G}})$; denn es sei $\{h_A\}_{A \in \mathcal{R}} \in \lim_{A \rightarrow 0} H_p^A(\mathcal{G})$

und $\underline{B}$ feiner $\underline{A}$; wegen (29) existiert dann ein $C \in \mathcal{R}$

⁸⁾ Aus (24) folgt: Ist $a \geq b$, so ist $U_a \supseteq U_b$. Nur weil hiervon i. a. die Umkehrung nicht gilt, führen wir die Relation $\succ$ mit der entscheidenden Eigenschaft (28) ein.

mit $B \succ C$, und wegen (27) und (28) ist $A \succeq C$ und

$$B \succeq C; \text{ daher ist } t_{\underline{B}}^A h_B = t_{\underline{B}}^A t_C^B h_C = t_{\underline{B}}^A t_{\underline{C}}^B h_C = \\ t_{\underline{C}}^A h_C = t_C^A h_C = h_A.$$

Weiter sind die Homomorphismen

$$H_p(\underline{\varphi}) : H_p(\underline{\mathcal{G}'}) \longrightarrow H_p(\underline{\mathcal{G}})$$

und

$$H_p(\underline{\varphi}) : H_p(\underline{\mathcal{G}'}) \longrightarrow H_p(\underline{\mathcal{G}})$$

gleich; ebenso

$$\partial_p : H_{p+1}(\underline{\mathcal{G}''}) \longrightarrow H_p(\underline{\mathcal{G}'})$$

und

$$\partial_p : H_{p+1}(\underline{\mathcal{G}''}) \longrightarrow H_p(\underline{\mathcal{G}'}).$$

Unter den Voraussetzungen I - IV sind also die Čechsche Homologie-Theorie von X und die Homologie-Theorie der abelschen Halbgruppe $\mathcal{A}$ gleich, sofern man sich auf solche Modulfamilien über $\mathcal{A}$ beschränkt, wie sie sich aus Prägarben über X gemäß 6.2. ergeben.

Literaturverzeichnis

Es werden nur die in dieser Arbeit unmittelbar benutzten Quellen angegeben.

- [1] H. Cartan-S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton 1956.
- [2] S. Eilenberg-N. Steenrod: Foundations of Algebraic Topology, Princeton 1952.
- [3] F. Hirzebruch-G. Scheja: Garben- und Cohomologietheorie, Münster 1957.
- [4] E. Luft: Eine Verallgemeinerung der Čechschen Homologietheorie, Bonner Mathematische Schriften Nr. 8.
- [5] G. Nöbeling: Cohomologie-Moduln über abelschen Halbgruppen, Bonner Mathematische Schriften Nr. 12.
- [6] G. Nöbeling: Bestimmung der Čechschen Cohomologie-Moduln eines Raumes X durch einen Funktionenring über X , Bonner Mathematische Schriften Nr. 12.
- [7] Séminaire H. Cartan, 1948/49, Paris 1955.

Lebenslauf

Am 11. August 1935 wurde ich, Otto Gerstner, als Sohn des Diplom-Ingenieurs Erhard Gerstner und seiner Frau Adolfine in Prag geboren.

Von 1941 bis 1945 besuchte ich die Volksschule; von 1945 bis Sommer 1954 besuchte ich das Gymnasium in Berlin und Fürth.

Vom Wintersemester 1954/55 an studierte ich Mathematik und Physik an der Universität Erlangen; im dritten Semester besuchte ich die Universität München. Im Wintersemester 1958/59 legte ich die Diplomprüfung in Mathematik ab.

